Massa en energiebehoud

Opgave: Relativistisch versus niet-relativistisch

a) Niet-relativistisch geldt:

$$E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$$
$$* \; m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$* \; v = 1{,}0 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$
$$\Rightarrow E_k = 4{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

Relativistisch geldt:

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$
$$* \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\frac{1}{3}c}{c}\right)^2\right)}} = 1{,}06$$
$$* \; m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$\Rightarrow E_k = 5{,}0 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

Dit is een verschil van 9%.

b) Niet-relativistisch geldt:

$$E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$$
$$* \; m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$* \; v = 2{,}0 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$
$$\Rightarrow E_k = 1{,}8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Relativistisch geldt:

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$
$$* \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\frac{2}{3}c}{c}\right)^2\right)}} = 1{,}34$$
$$* \; m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$\Rightarrow E_k = 2{,}8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Dit is een verschil van 56%.

Je ziet dat de klassieke formule voor de kinetische energie behoorlijk gaat afwijken van de correcte relativistische waarde zodra de snelheid in de buurt van de lichtsnelheid komt.

Opgave: Deeltjesversneller

a) Relativistisch geldt:

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

$$* \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{0{,}9 \cdot c}{c}\right)^2\right)}} = 2{,}29$$

$$* m_0 \cdot c^2 = 939 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow E_k = 1{,}22 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

b) $W = \Delta E_k = E_k - 1{,}22 \cdot 10^3$

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

$$* \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{0{,}99 \cdot c}{c}\right)^2\right)}} = 7{,}09$$

$$* m_0 \cdot c^2 = 939 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow E_k = 5{,}72 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow W = 4{,}51 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

c) $W = \Delta E_k = E_k - 5{,}72 \cdot 10^3$

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

$$* \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{0{,}999 \cdot c}{c}\right)^2\right)}} = 22{,}4$$

$$* m_0 \cdot c^2 = 939 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow E_k = 2{,}01 \cdot 10^4 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow W = 14{,}3 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

In nevenstaande afbeelding staat de relativistische kinetische energie weergegeven als functie van v/c. De kinetische energie staat op een logaritmische schaal. Je kunt nu duidelijk zien dat een snelheidstoename een steeds grotere hoeveelheid energie vereist als de snelheid de lichtsnelheid nadert.