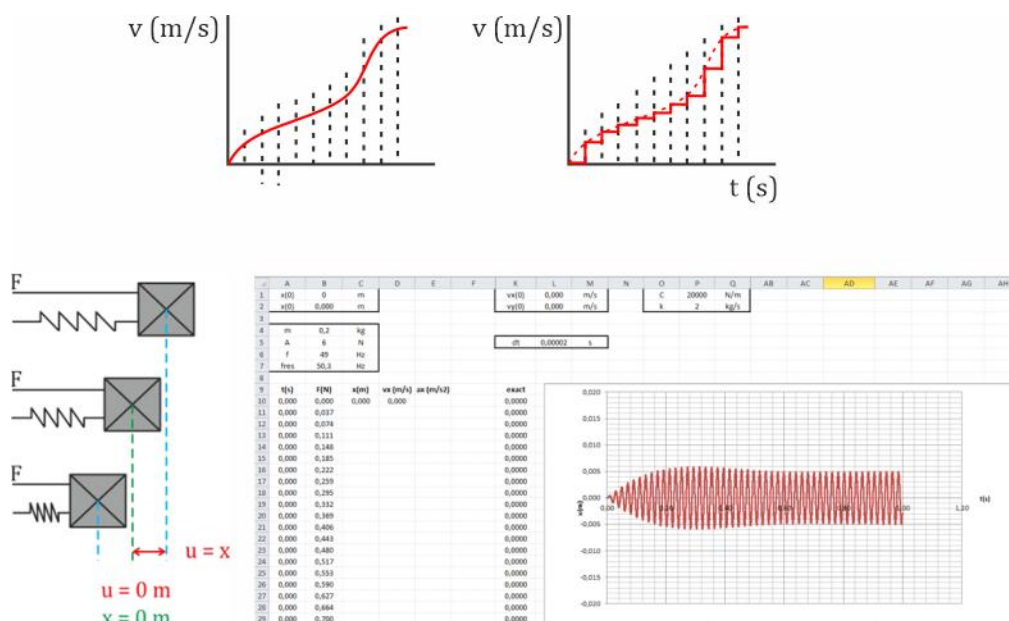


Reader: Beweging numeriek



Voorkennis

Deze reader is het vervolg op de readers:

- “Beweging” van de tweede klas: [link naar reader 1\)](#)
- “Krachten en beweging” van de derde klas: [link naar reader 2\)](#)

Auteursrechten

Voor een gedetailleerde bronvermelding voor de gebruikte afbeeldingen wordt verwezen naar het [colofon](#).



Inhoud

Voorkennis.....	1
Beweging.....	3
Voorbeeld: Roofjump II.....	3
Opgave: Roofjump met hoek.....	8
Colofon	9



Beweging

Voorbeeld: Roofjump II

Bij één van de voorgaande opgaven heb je moeten berekenen hoe snel iemand moet rennen om van een hoger gelegen dak naar een lager gelegen dak te springen. In het eenvoudige geval dat je daar hebt bestudeerd wist je de exacte vergelijkingen die de beweging beschreven. Wat als je deze niet weet?

Je kunt bewegingen ook numeriek oplossen. Stel iemand rent van een horizontaal dak met een horizontaal gerichte beginsnelheid $4,0 \text{ m/s}$. Het lager gelegen dak bevindt zich $4,0 \text{ m}$ verderop en $2,0 \text{ m}$ lager.

Teken de baan van de man.



Deze opgave gaan we oplossen met behulp van Excel.

Ten eerste vereenvoudigen we het probleem door de luchtweerstand te verwaarlozen en de man als puntmassa te beschouwen.

De beginvoorwaarden voor het numerieke programma zijn als volgt:

Plaats:

$$x(0) = 0 \text{ m}$$

$$y(0) = 2,0 \text{ m}$$

Snelheid:

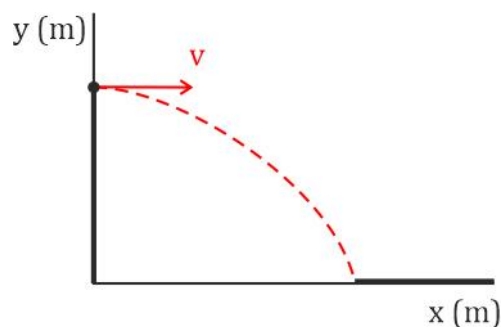
$$v_x(0) = 4,0 \text{ m/s}$$

$$v_y(0) = 0 \text{ m/s}$$

Versnelling:

$$a_x = 0 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -9,81 \text{ m/s}^2$$



Op tijdstip $t = 0$ zijn plaats, snelheid en versnelling bekend, maar hoe bereken je de plaats en snelheid op een tijdstip dat later ligt.

Een computer doet dat heel eenvoudig. Een computer benadert het probleem door het probleem in kleine tijdstapjes te verdelen. Tijdens zo'n tijdstapje worden alle grootheden constant verondersteld.

De rechte in het eerste

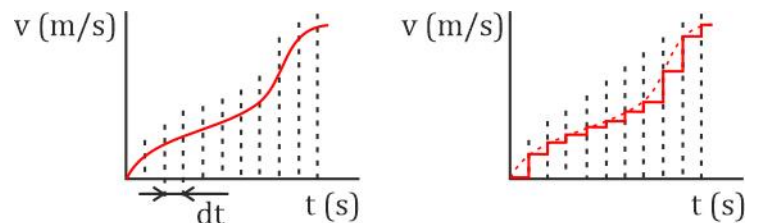
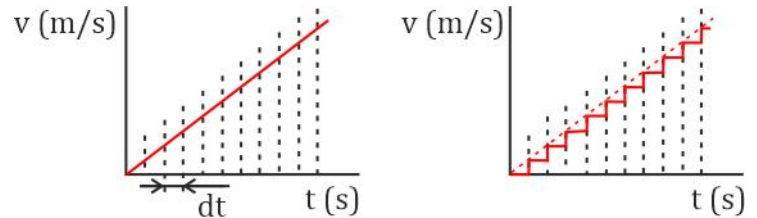
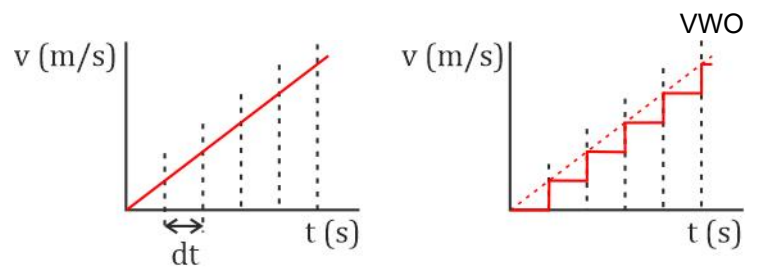
(v,t) -diagram wordt benaderd door de trapgrafiek in het diagram rechtsboven.

Door de tijdstap kleiner te kiezen zoals is gedaan in de volgende twee diagrammen, zie je dat de trapgrafiek in het vierde diagram al een veel betere benadering is voor de rechte. Door de tijdstap steeds kleiner te nemen kan de benadering steeds nauwkeuriger worden gemaakt.

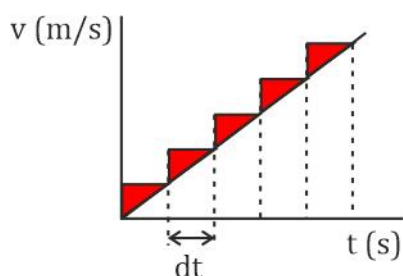
Dit gaat echter ten koste van de rekentijd.

Deze benaderingsmethode werkt voor elke willekeurige kromme lijn.

Zie nevenstaand (v,t) -diagram.



De afgelegde weg komt overeen met het oppervlak onder het (v,t) -diagram.
Elk willekeurig oppervlak kan op bovenstaande manier dus worden benaderd als een optelsom van rechthoeken met breedte dt en hoogte v .

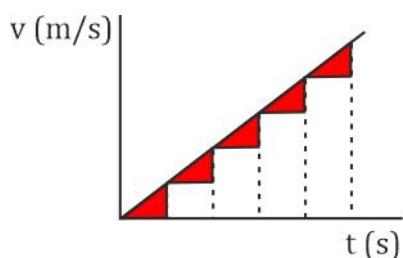


Overschatting:

Bij deze benadering tel je bij elke rechthoek een stukje *te veel* (aangegeven als rode driehoekjes).

Elke dt seconden neemt de afgelegde weg s toe met de oppervlakte van één rechthoek.

De snelheid v *aan het einde* van het tijdsinterval dt is de hoogte van de rechthoek. De breedte van de rechthoek is gelijk aan dt .

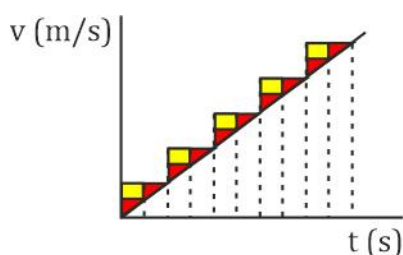


Onderschatting:

Bij deze benadering tel je bij elke rechthoek een stukje *te weinig* (aangegeven als rode driehoekjes).

Elke dt seconden neemt de afgelegde weg s toe met de oppervlakte van één rechthoek.

De snelheid v *aan het begin* van het tijdsinterval dt is de hoogte van de rechthoek. De breedte van de rechthoek is gelijk aan dt .



Ook nu weer is duidelijk te zien dat als de stapgrootte dt kleiner wordt gekozen de benadering van het oppervlak onder het (v,t) -diagram nauwkeuriger wordt. Dit is in nevenstaande afbeelding weergegeven. Hierin is de stapgrootte gehalveerd. Het teveel getelde stuk oppervlak is weergegeven met rode driehoekjes. De gele rechthoekjes geven het verschil tussen de vorige benadering (de overschatting met een twee keer zo grote dt) en deze benadering weer.

Natuurlijk geldt eenzelfde redenering voor het geval van de onderschatting.

Terug naar ons voorbeeld.

$v_x = 4,0$ m/s betekent dat dt seconden later x met $v_x \cdot dt$ meter is toegenomen.

Weer dt seconden later is x weer met $v_x \cdot dt$ meter toegenomen.

$$x(0) = 0$$

$$x(dt) = x(0) + v_x \cdot dt$$

$$x(2 \cdot dt) = x(0) + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt = x(dt) + v_x \cdot dt$$

$$x(3 \cdot dt) = x(0) + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt = x(2 \cdot dt) + v_x \cdot dt$$

$$x(4 \cdot dt) = x(0) + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt + v_x \cdot dt = x(3 \cdot dt) + v_x \cdot dt$$

enz.

$$\text{In het algemeen: } x((n+1) \cdot dt) = x(n \cdot dt) + v_x \cdot dt$$

Oftewel in eenvoudige bewoording: de nieuwe x is de oude x plus het volgende rechthoekje $v_x \cdot dt$.

$v_y = 0,0$ m/s betekent dat dt seconden later y met $v_y \cdot dt$ meter is toegenomen.

Weer dt seconden later is y weer met $v_y \cdot dt$ meter toegenomen.

$$y(0) = 0$$

$$y(dt) = y(0) + v_y \cdot dt$$

$$y(2 \cdot dt) = y(0) + v_y \cdot dt + v_y \cdot dt = y(dt) + v_y \cdot dt$$

$$y(3 \cdot dt) = y(0) + v_y \cdot dt + v_y \cdot dt + v_y \cdot dt = y(2 \cdot dt) + v_y \cdot dt$$

$$y(4 \cdot dt) = y(0) + v_y \cdot dt + v_y \cdot dt + v_y \cdot dt + v_x \cdot dt = y(3 \cdot dt) + v_y \cdot dt$$

enz.

$$\text{In het algemeen: } y((n+1) \cdot dt) = y(n \cdot dt) + v_y \cdot dt$$

Net zoals de afgelegde weg is te bepalen met behulp van het oppervlak onder een (v,t) -diagram zo is de snelheidsverandering te bepalen met behulp van het oppervlak onder een (a,t) -diagram.

v_x is constant, want $a_x = 0$ m/s².

v_y is niet constant, want $a_y = -9,81$ m/s².

$a_y = -9,81$ m/s² betekent dat dt seconden later v_y met $a_y \cdot dt$ meter is toegenomen.

Weer dt seconden later is v_y weer met $a_y \cdot dt$ meter toegenomen.

$$v_y(0) = 0$$

$$v_y(dt) = v_y(0) + a_y \cdot dt$$

$$v_y(2 \cdot dt) = v_y(0) + a_y \cdot dt + a_y \cdot dt = v_y(dt) + a_y \cdot dt$$

$$v_y(3 \cdot dt) = v_y(0) + a_y \cdot dt + a_y \cdot dt + a_y \cdot dt = v_y(2 \cdot dt) + a_y \cdot dt$$

$$v_y(4 \cdot dt) = v_y(0) + a_y \cdot dt + a_y \cdot dt + a_y \cdot dt + a_x \cdot dt = v_y(3 \cdot dt) + a_y \cdot dt$$

enz.

$$\text{In het algemeen: } v_y((n+1) \cdot dt) = v_y(n \cdot dt) + a_y \cdot dt$$

Deze rekenregels kun je gemakkelijk in Excel invoeren.

De rekenregels luiden dan:

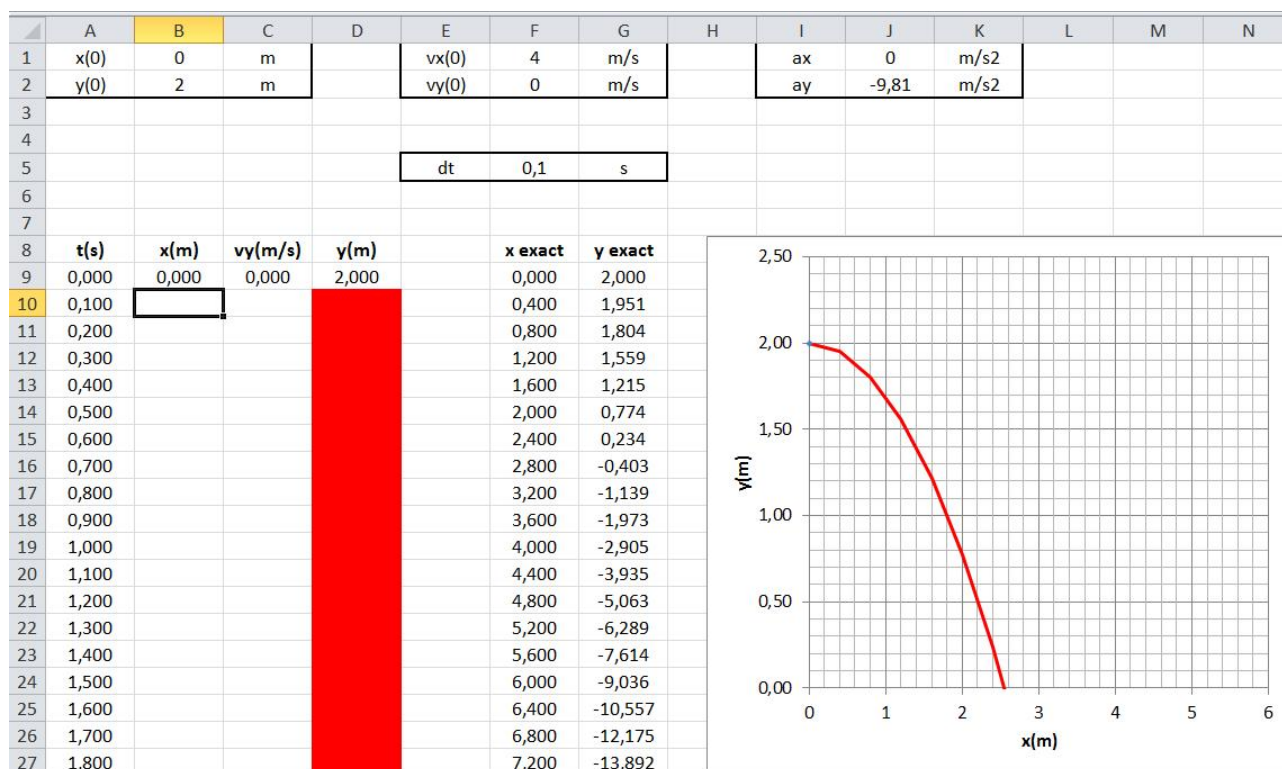
$$x_{n+1} = x_n + v_x \cdot dt$$

$$y_{n+1} = y_n + v_y \cdot dt$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} + a_y \cdot dt$$

Open het bestand "Roofjump 1.xlsx". Dit bestand is te vinden op de site.

http://www.rwi-natuurkunde.nl/download/doc/Roofjump_1.xlsx



In het bestand is reeds een t-kolom met t-waarden.

Tevens is er al een diagram waarin y als functie van x is uitgezet.

De exacte oplossing is reeds weergegeven met een rode lijn. De numerieke oplossing zal verschijnen als blauwe punten. De rode achtergrondkleur in de kolom voor de y-waarden geeft aan dat de y-waarde kleiner of gelijk aan 0 m is.

a) Voer de rekenregels voor x(m) en v(m/s) en y(m) in.

Kopieer deze naar alle onderliggende cellen.

Je ziet dat de blauwe punten niet precies overeenkomen met de rode lijn. Dit komt omdat de numerieke methode gedurende de tijdstapjes dt veronderstelt dat vy constant is. Dit is natuurlijk niet waar. Maar deze benadering wordt beter als het tijdstapje dt korter duurt.

b) Verander de waarde voor dt van 0,1 s naar 0,01 s en kijk wat er gebeurt.

c) Bepaal met behulp van dit programma de minimale snelheid die de springer moet hebben om het lager gelegen dak te bereiken.

Opgave: Roofjump met hoek

Open het bestand "Roofjump 2.xlsx". Ook dit bestand is te vinden op de site.

http://www.rwi-natuurkunde.nl/download/doc/Roofjump_2.xlsx

Dit bestand is soortgelijk opgebouwd als het Excelbestand in het vorige voorbeeld.

Nu zet de springer zich echter af van de rand van het dak, waardoor de beginsnelheid niet horizontaal is gericht.

De beginvoorwaarden voor het numerieke programma zijn als volgt:

Plaats:

$$x(0) = 0 \text{ m}$$

$$y(0) = 2,0 \text{ m}$$

Snelheid:

$$v(0) = 5,0 \text{ m/s}$$

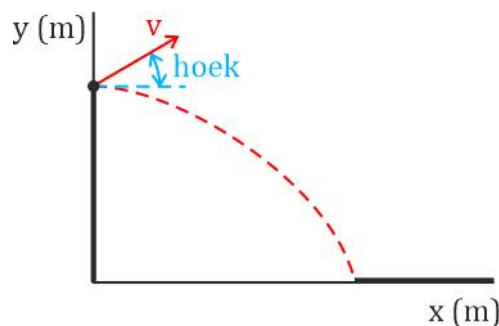
Versnelling:

$$a_x = 0 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -9,81 \text{ m/s}^2$$

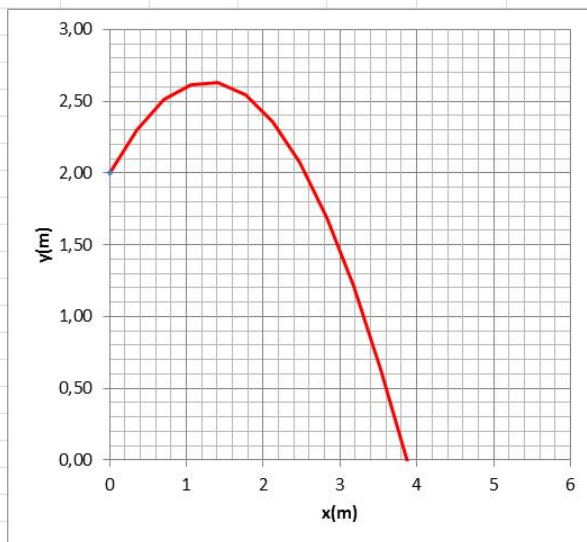
Hoek:

$$\text{hoek} = 45^\circ$$



- Voer de rekenregels voor $x(m)$ en $v(m/s)$ en $y(m)$ in. Kopieer deze naar alle onderliggende cellen.
- Bepaal het bereik van hoeken waarmee de springer zich kan afzetten om bij de gegeven snelheid het lager gelegen dak te bereiken.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x(0)	0	m		vx(0)	3,536	m/s		ax	0	m/s ²			
2	y(0)	2	m		vy(0)	3,536	m/s		ay	-9,81	m/s ²			
3														
4	v	5	m/s											
5	hoek	45	graden		dt	0,10	s							
6														
7														
8	t(s)	x(m)	vy(m/s)	y(m)	x exact	y exact								
9	0,000	0,000	3,536	2,000	0,000	2,000								
10	0,100				0,354	2,305								
11	0,200				0,707	2,511								
12	0,300				1,061	2,619								
13	0,400				1,414	2,629								
14	0,500				1,768	2,542								
15	0,600				2,121	2,356								
16	0,700				2,475	2,071								
17	0,800				2,828	1,689								
18	0,900				3,182	1,209								
19	1,000				3,536	0,631								
20	1,100				3,889	-0,046								
21	1,200				4,243	-0,821								
22	1,300				4,596	-1,693								
23	1,400				4,950	-2,664								
24	1,500				5,303	-3,733								
25	1,600				5,657	-4,900								
26	1,700				6,010	-6,165								
27	1,800				6,364	-7,528								



Zodra je de module krachten hebt bestudeerd zullen we kijken naar bewegingen met wrijving en kunnen de modellen steeds realistischer worden.

Colofon

Deze reader is onderdeel van het lesmateriaal dat is ontwikkeld voor het vak natuurkunde bij het Roercollege Schöndeln in Roermond. Dit bestand is onderdeel van een complete lesmethode die het gehele curriculum voor het vak natuurkunde van VWO 2 t/m VWO 6 dekt.

De gehele lesmethode is te vinden op de site <https://www.rwi-natuurkunde.nl>.


De afbeeldingen die in dit lesmateriaal zijn gebruikt zijn in ruwweg vier groepen te verdelen:

- Afbeeldingen die zelf zijn gemaakt. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen afkomstig uit het publieke domein (creative commons CC0). Hieronder vallen de afbeeldingen van onder andere Pixabay, Pexels, Unsplash en HiClipart. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen die zijn ingekocht bij onder andere iStock, Shutterstock, DepositPhotos en Dreamstime. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen afkomstig uit het publieke domein, maar die onder de creative commons licentie (CC BY) vallen. Deze afbeeldingen zijn gemarkeerd met “©”.

In onderstaande lijst is herkomst en de auteursrechthebbende voor de diverse afbeeldingen weergegeven voor zover die bij mij bekend zijn. Mocht iemand van mening zijn dat er een afbeelding tussen zit waar auteursrecht op zit dan kan dat gemeld worden bij somlrw02@soml.nl.

Afbeeldingen die niet in onderstaande lijst zijn opgenomen zijn geheel zelf gemaakt.

Reader:

Blz.	Afbeelding	Herkomst / auteursrecht
3		https://parkourentrepreneur.com