Plaatsfuncties

Opgave: werken met plaatsfuncties

Deze opgave heb je in de tweede klas al eens gemaakt. Toen heb je met behulp van een (x,t)-diagram bepaald wanneer en op welke plaats de twee treinen elkaar passeren. Nu kun je dit niet alleen bepalen met behulp van een grafiek, maar ook berekenen. Link naar reader [1], zie opgave R05.

a) $x = x_0 + s$

$\quad * \, x_0 = 0 \text{ m}$

$\quad * \, s = v \cdot t$ want de intercity voert een eenparige beweging uit

$\quad\quad * \, v = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$

$\quad \Rightarrow s = 40 \cdot t$

$\Rightarrow x = 0 + 40 \cdot t$

$\Rightarrow x = 40 \cdot t$

b) $x = x_0 - s$ want de goederentrein beweegt naar links

$\quad * \, x_0 = 24 \text{ km} = 24 \cdot 10^3 \text{ m}$

$\quad * \, s = v \cdot t$ want de intercity voert een eenparige beweging uit

$\quad\quad * \, v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$

$\quad \Rightarrow s = 30 \cdot t$

$\Rightarrow x = 24 \cdot 10^3 - 30 \cdot t$

c) Als de treinen elkaar passeren hebben ze gelijke waarden voor x.

$x_{\text{intercity}} = x_{\text{goederentrein}}$

$\quad * \, x_{\text{intercity}} = 40 \cdot t$

$\quad * \, x_{\text{goederentrein}} = 24 \cdot 10^3 - 30 \cdot t$

$\Rightarrow 40 \cdot t = 24 \cdot 10^3 - 30 \cdot t$

$\Rightarrow t = 34{,}3 \text{ s} \quad \text{en} \quad x = 40 \cdot t = 40 \cdot 34{,}3 = 13{,}7 \cdot 10^3 \text{ m}$

In ieder geval de tijd in bovenstaande resultaat had je sneller kunnen berekenen. Je kunt namelijk gebruik maken van het begrip relatieve snelheid, **mits** beide snelheden constant zijn.

$s = v_{\text{rel}} \cdot t$

$\quad * \, v_{\text{rel}} = 108 + 144 = 252 \text{ km/h} = 70 \text{ m/s}$

dat is de snelheid waarmee het gat gedicht wordt

$\quad * \, s = 24 \text{ km} = 24 \cdot 10^3 \text{ m}$

$\Rightarrow t = 34{,}3 \text{ s}$

De x-waarde vind je, net zoals eerst, door de plaats van de intercity te berekenen.

$x_{\text{intercity}} = v \cdot t = 40 \cdot 34{,}2 = 13{,}7 \cdot 10^3 \text{ m}$

De methode met de plaatsfuncties is veel algemener toepasbaar. Als de intercity bijvoorbeeld eenparig zou versnellen dan werkt die methode nog steeds, maar de methode met de relatieve snelheid niet meer. In de voortgangstoetsen zul die variant tegenkomen.

1)

Opgave: vrachtwagens op de autosnelweg

a) $x_{achter} = x_0 + s$

$* \, x_0 = 0 \text{ m}$

$* \, s = ½ \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ want de vrachtwagen voert een eenparig versnelde beweging uit

$* \, a = 0{,}64 \text{ m/s}^2$

$* \, v_0 = 87 \text{ km/h} = 24{,}167 \text{ m/s}$

$\Rightarrow s = ½ \cdot 0{,}64 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow x_{achter} = 0 + ½ \cdot 0{,}64 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow x_{achter} = 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$x_{voor} = x_0 + s$

$* \, x_0 = 10 + 7{,}5 = 17{,}5 \text{ m}$

$* \, s = v \cdot t$ want de vrachtwagen voert een eenparige beweging uit

$* \, v = 87 \text{ km/h} = 24{,}167 \text{ m/s}$

$\Rightarrow s = 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow x_{voor} = 17{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

Als de vrachtwagens neus aan neus zijn hebben ze gelijke waarden voor x.

$x_{achter} = x_{voor}$

$* \, x_{achter} = 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$* \, x_{voor} = 17{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t = 17{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow 0{,}32 \cdot t^2 = 17{,}5$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{17{,}5}{0{,}32}} = 7{,}395 \text{ s}$

$\Rightarrow x_{achter} = 0{,}32 \cdot 7{,}395^2 + 24{,}167 \cdot 7{,}395 = 196 \text{ m}$

b) Het verschil met b) is de keuze voor x_0.

$x_{achter} = x_0 + s$

$\Rightarrow x_{achter} = 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$x_{voor} = x_0 + s$

$* \, x_0 = 17{,}5 + 14 + 4 = 35{,}5 \text{ m}$

$* \, s = 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow x_{voor} = 35{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

$x_{achter} = x_{voor}$

$* \, x_{achter} = 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t$

$* \, x_{voor} = 35{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t = 35{,}5 + 24{,}167 \cdot t$

$\Rightarrow 0{,}32 \cdot t^2 = 35{,}5$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{35{,}5}{0{,}32}} = 10{,}53 \text{ s}$

$\Rightarrow x_{achter} = 0{,}32 \cdot 10{,}53^2 + 24{,}167 \cdot 10{,}53 = 290 \text{ m}$

c) Als de vrachtwagen de volledige $10{,}53\ \mathrm{s}$ blijft versnellen, zou zijn snelheid toenemen tot: $v = v_0 + a \cdot t = 24{,}167 + 0{,}64 \cdot 10{,}53 = 30{,}91\ \mathrm{m/s} = 111\ \mathrm{km/h}$
De extra complicatie van c) ten opzichte van b) zit hem dus in het overschrijden van die $95\ \mathrm{km/h}$.
Dat is de lastigste opgave van dit type.

Hoe los je dat op? Je splitst de opgave in twee stukken.

Hoe lang kun je versnellen?

$v = v_0 + a \cdot t$
 $* \ v = 95\ \mathrm{km/h} = 26{,}389\ \mathrm{m/s}$
 $* \ v_0 = 24{,}167\ \mathrm{m/s}$
 $* \ a = 0{,}64\ \mathrm{m/s^2}$
$\Rightarrow 26{,}389 = 24{,}167 + 0{,}64 \cdot t$
$\Rightarrow t = 3{,}472\ \mathrm{s}$

Waar zijn de vrachtwagens na $3{,}472\ s$?

$x_{achter} = x_0 + s$
$\Rightarrow x_{achter} = 0{,}32 \cdot t^2 + 24{,}167 \cdot t = 0{,}32 \cdot 3{,}472^2 + 24{,}167 \cdot 3{,}472 = 87{,}77\ \mathrm{m}$

$x_{voor} = x_0 + s$
 $* \ x_0 = 17{,}5\ \mathrm{m}$
 $* \ s = 24{,}167 \cdot t = 24{,}167 \cdot 3{,}472 = 83{,}91\ \mathrm{m}$
$x_{voor} = 17{,}5 + 83{,}91 = 101{,}4\ \mathrm{m}$

Nu is de som weer standaard. Let op! Vanaf $t = 3{,}472\ \mathrm{s}$ rijden beide eenparig.

$x_{achter} = x_0 + s$
 $* \ x_0 = 87{,}77\ \mathrm{m}$
 $* \ s = v \cdot t = 26{,}389 \cdot t$
$\Rightarrow x_{achter} = 87{,}77 + 26{,}389 \cdot t$

$x_{voor} = x_0 + s$
 $* \ x_0 = 101{,}4 + 14 + 4 = 119{,}4\ \mathrm{m}$
 $* \ s = 24{,}167 \cdot t$
$\Rightarrow x_{voor} = 119{,}4 + 24{,}167 \cdot t$

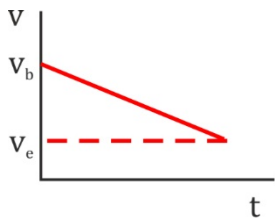
$x_{achter} = x_{voor}$
 $* \ x_{achter} = 87{,}77 + 26{,}389 \cdot t$
 $* \ x_{voor} = 119{,}4 + 24{,}167 \cdot t$
$\Rightarrow 87{,}77 + 26{,}389 \cdot t = 119{,}4 + 24{,}167 \cdot t$
$\Rightarrow t = 14{,}24\ \mathrm{s}$
$\Rightarrow x_{achter} = 87{,}77 + 26{,}389 \cdot 14{,}24 = 464\ \mathrm{m}$

Vrije val

In de eerste versie van het antwoord wordt niet volgens de tekenafspraak gewerkt maar gewoon met gezond verstand geredeneerd. Als je weet wat je doet is dat in dit geval eenvoudiger. In de tweede versie van het antwoord wordt wel met de correcte tekenafspraak gewerkt. Beide methodes zijn echter correct.

Extra Opgave: Ondeugende jeugd

Het is een eenparig versnelde beweging (vrije val). Dit is een voorbeeld waarbij noch de beginsnelheid noch de eindsnelheid $0\ \mathrm{m/s}$ is. Hier kun je dus niet volstaan met de beperkte formules. Het (v,t)-diagram voor de beweging van het broodje langs het raam ziet eruit zoals weergegeven in nevenstaande afbeelding.



De afgelegde weg komt overeen met de oppervlakte onder het (v,t)-diagram.
Er geldt:

1) $s = v_b \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$
2) $v_e = v_b + a \cdot t$
3) $a = g$

$\Rightarrow$ 1) $2{,}2 = v_b \cdot 0{,}28 + ½ \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}28^2$
$\Rightarrow v_b = 6{,}48\ \mathrm{m/s}$

Dus de snelheid die het broodje heeft bereikt tussen het tijdstip van vertrek en het tijdstip dat het boven aan het raam verschijnt is $6{,}48\ \mathrm{m/s}$. De vraag is dus nu:

Hoeveel meter moest het broodje afleggen om deze snelheid te krijgen?

Dit is simpelweg een vrije val met beginsnelheid $0\ \mathrm{m/s}$.
Er geldt:

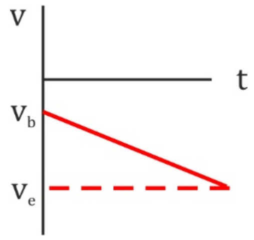
1) $s = ½ \cdot a \cdot t^2$
2) $v_e = a \cdot t$
3) $a = g$

$\Rightarrow$ 1) $s = ½ \cdot 9{,}81 \cdot t^2$
2) $6{,}48 = 9{,}81 \cdot t$
$\Rightarrow t = 0{,}66\ \mathrm{s}$

$\Rightarrow$ 1) $s = ½ \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}66^2 = 2{,}1\ \mathrm{m}$

Het broodje is dus $2{,}1\ \mathrm{m}$ boven de bovenkant van het raam losgelaten. De daders zitten dus waarschijnlijk één etage hoger.

Extra Opgave: Ondeugende jeugd



Het is een eenparig versnelde beweging (vrije val). Dit is een voorbeeld waarbij noch de beginsnelheid noch de eindsnelheid $0\ \mathrm{m/s}$ is. Hier kun je dus niet volstaan met de beperkte formules. Het (v,t)-diagram voor de beweging van het broodje langs het raam ziet eruit zoals weergegeven in nevenstaande afbeelding.
Het broodje valt omlaag dus v is negatief.
De valversnelling is eveneens omlaag gericht en is dus negatief.
Er geldt:

1) $x_{\text{onderkant raam}} = x_{\text{bovenkant raam}} + v_b \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$
2) $v_e = v_b + a \cdot t$
3) $a = g$

$\Rightarrow$ 1) $x_{\text{onderkant raam}} - x_{\text{bovenkant raam}} = -2{,}2 = v_b \cdot 0{,}28 + ½ \cdot (-9{,}81) \cdot 0{,}28^2$
$\Rightarrow v_b = -6{,}48\ \mathrm{m/s}$

Dus de snelheid die het broodje heeft bereikt tussen het tijdstip van vertrek en het tijdstip dat het boven aan het raam verschijnt is $-6{,}48\ \mathrm{m/s}$. De vraag is dus nu:

Hoeveel meter moest het broodje afleggen om deze snelheid te krijgen?

Dit is simpelweg een vrije val met beginsnelheid $0\ \mathrm{m/s}$.
Er geldt:

1) $x_{\text{bovenkant raam}} = x_{\text{ondeugende jeugd}} + ½ \cdot a \cdot t^2$
2) $v = a \cdot t$
3) $a = g$

$\Rightarrow$ 1) $x_{\text{bovenkant raam}} - x_{\text{ondeugende jeugd}} = ½ \cdot (-9{,}81) \cdot t^2$
2) $-6{,}48 = -9{,}81 \cdot t$
$\Rightarrow t = 0{,}66\ \mathrm{s}$

$\Rightarrow$ 1) $x_{\text{bovenkant raam}} - x_{\text{ondeugende jeugd}} = ½ \cdot (-9{,}81) \cdot 0{,}66^2 = -2{,}1\ \mathrm{m}$

Het broodje is dus $2{,}1\ \mathrm{m}$ boven de bovenkant van het raam losgelaten.
Bedenk dat $x_{\text{bovenkant raam}} = -2{,}1\ \mathrm{m}$ en $x_{\text{ondeugende jeugd}} = 0\ \mathrm{m}$ dus $x_{\text{bovenkant raam}} - x_{\text{ondeugende jeugd}} = -2{,}1 - 0 = -2{,}1\ \mathrm{m}$.

De daders zitten dus waarschijnlijk één etage hoger.