Reader: Trillingen

Voorkennis

Deze reader is het vervolg op de readers:

- “Krachten” van de vierde klas: link naar reader [1)]
- “Arbeid en energie” van de vierde klas: link naar reader [2)]

Auteursrechten

Voor een gedetailleerde bronvermelding voor de gebruikte afbeeldingen wordt verwezen naar het colofon.

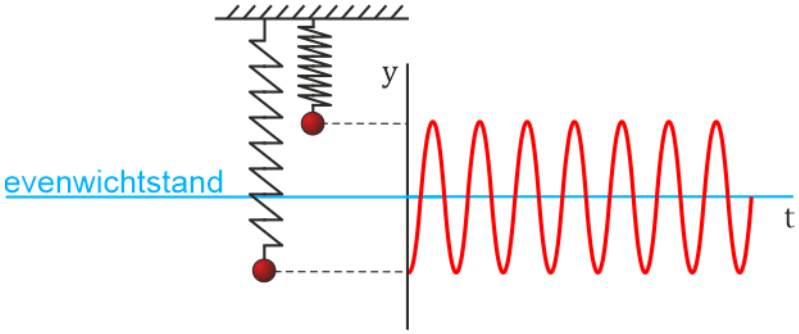
Inhoud

Voorkennis 1
Trillingen 3
Harmonische trilling 5
Opgave: Bol aan veer 6
Resonantie 7
Opgave: Trillingen in een vrachtauto 8
Energiebehoud 10
Energiebehoud in een massaveersysteem 10
Energiebehoud in de slinger 12
Opgave: Rugzakgenerator 13
Colofon 15

Trillingen

In deze reader gaan we kijken naar een iets ingewikkelder soort van beweging, namelijk de trilling. Er zijn allerlei soorten trillingen, maar één ding hebben ze allemaal gemeenschappelijk, het zijn allemaal periodieke bewegingen rond een evenwichtstand. Of het nu mechanische trillingen of elektrische trillingen zijn maakt daarbij niet uit. Om een trilling natuurkundig te beschrijven heb je, zoals dat meestal het geval is, een aantal grootheden nodig waarmee de diverse eigenschappen van een trilling worden vastgelegd.

Stel je hebt een massa aan een veer die een trilling uitvoert. Je krijgt de opdracht om de plaats als functie van de tijd weer te geven in een (y,t)-diagram.



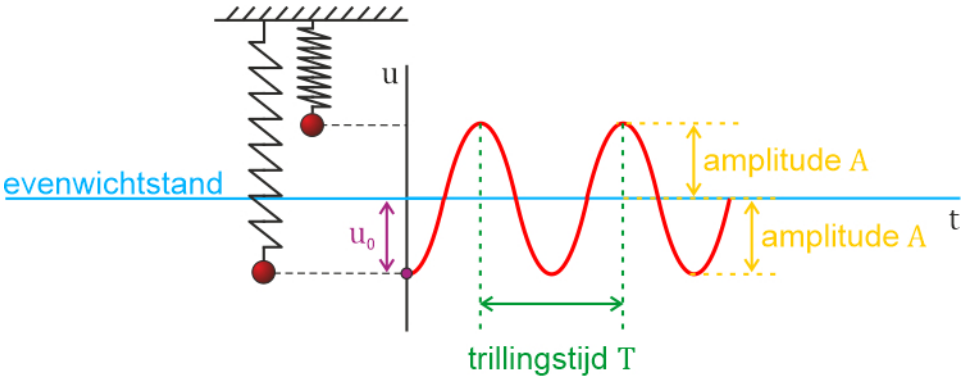
Welke gegevens heb je nodig om dit diagram exact te kunnen tekenen?

Om het gevraagde diagram te kunnen tekenen moet je aantal dingen weten:

- Hoe lang duurt één periode?
- Hoe groot is de maximale uitwijking uit de evenwichtstand?
- Hoe groot is de uitwijking op tijdstip $t = 0$ s?

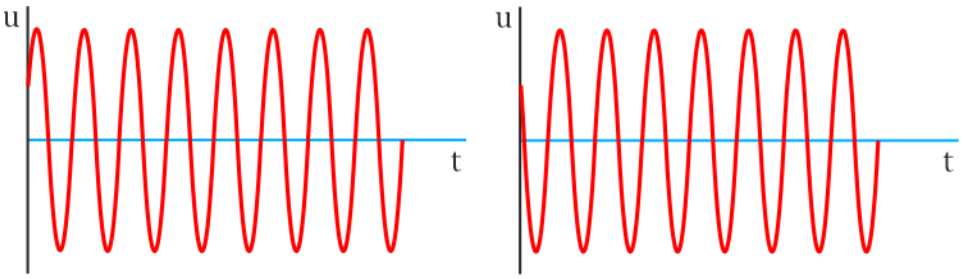
Al deze dingen worden weergegeven met hun eigen grootheid. Zie onderstaande afbeelding.

- Hoe lang één periode duurt wordt weergegeven door de trillingstijd T.
  Dus zoek een stuk dat zich steeds herhaalt en kijk hoe lang dat duurt. Daartoe zijn meerdere mogelijkheden.
  Een hieraan gerelateerde grootheid is de frequentie f. Deze geeft aan hoeveel perioden er in één seconde passen. Deze grootheid wordt uitgedrukt in de eenheid Hertz (Hz).
- Hoe groot de maximale uitwijking uit de evenwichtstand is, wordt weergegeven door de amplitude A.
  Let op!
  Dit is niet de afstand van top tot dal, maar van evenwichtstand tot top of van evenwichtstand tot dal.
- De uitwijking ten opzichte van de evenwichtstand wordt aangeduid met de letter u.
  De uitwijking op tijdstip $t = 0$ s wordt weergegeven met u_0.



In het filmpje onder onderstaande link worden de basisgrootheden uit de afbeelding ook nog eens uitgelegd: link naar filmpje [1)].

Er is echter nog een probleem.
Stel je weet de trillingstijd en de amplitude. Daarnaast weet je ook dat de uitwijking op $t = 0$ s bijvoorbeeld $+\frac{1}{2}A$ is. Dan weet je nog steeds niet voldoende!
u_0 alleen is niet eenduidig, je zou onderstaande twee mogelijkheden hebben.



De grootheid die dit weergeeft wordt de fase genoemd en is geen onderdeel van het HAVO-examenprogramma. Als je jouw HAVO-opleiding vervolgt op het VWO zul je deze grootheid wel tegenkomen.

1)

Harmonische trilling

Van de soorten trillingen die in de natuur voorkomen, is de harmonische trilling een van de belangrijkste en meest voorkomende soort. Voor harmonische trillingen geldt dat de uitwijking als functie van de tijd een sinusfunctie is.

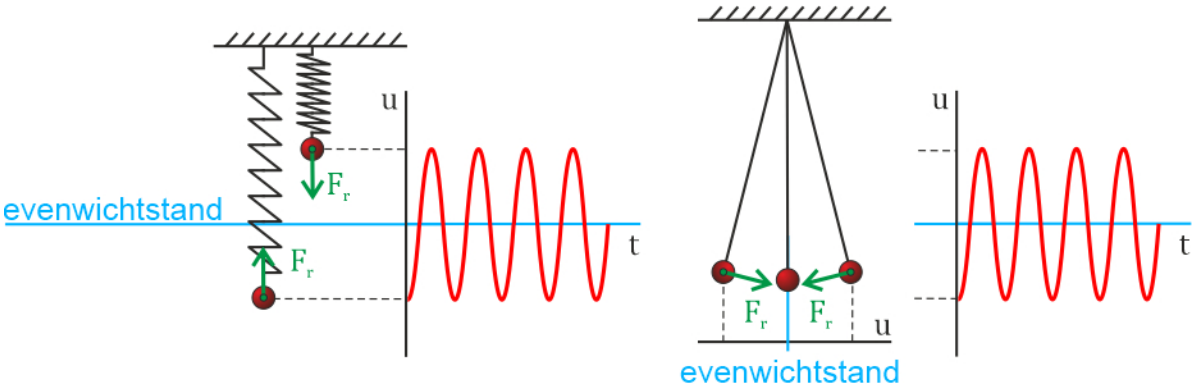
Wat is er speciaal aan de harmonische trilling?

Als een trilling harmonisch is laat deze zich wiskundig vrij eenvoudig beschrijven. Daarnaast zijn vrijwel alle in de natuur voorkomende trillingen te schrijven als een optelsom van eenvoudige harmonische trillingen, hetgeen het ook voor complexere problemen mogelijk maakt een oplossing te vinden.
De applet onder onderstaande link laat zien hoe je bijvoorbeeld een bloktrilling of een zaagtandtrilling kunt schrijven als een optelsom van sinusoïden.
link naar applet [1)]

Voor mechanische trillingen geldt dat deze harmonisch zijn als de resulterende kracht op het voorwerp:

- rechtevenredig is met de uitwijking uit de evenwichtstand;
- tegengesteld gericht is aan de uitwijking.

De uitwijking uit de evenwichtstand is dan een sinusfunctie van de tijd. Zie onderstaande afbeeldingen.



Een en ander is ook te zien in de applets onder onderstaande links (vink “Uitwijking” respectievelijk “Kracht” aan):
link naar applet (massa aan veer) [2)]
link naar applet (slinger) [3)]

De resulterende kracht voor een harmonische trilling wordt de terugdrijvende kracht genoemd. Voor de terugdrijvende kracht geldt:

$F_t = -C \cdot u$

Hierin staat:
- F_t voor de terugdrijvende kracht in Newton;
- C voor een trillingsconstante in N/m;
- u voor de uitwijking in m.

Let op! Er zijn twee formules met u, namelijk $F_t = -C \cdot u$ en $F_v = -C \cdot u$. De u in de beide formules is echter niet dezelfde! De formule voor de terugdrijvende kracht zegt iets over een trilling en dus is de u een trilling gerelateerde grootheid, namelijk de uitwijking. De formule voor de veerkracht zegt iets over een veer en dus is de u een veer gerelateerde grootheid, namelijk de uitrekking.

Twee soorten harmonische trillingen komen veel voor, namelijk een massa aan een slinger en een massa aan een veer. Voor beide soorten trillingen is een uitdrukking voor de trillingstijd van de betreffende trilling afgeleid:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Hierin is T de slingertijd van de slinger in s, ℓ de lengte van de slinger in m en g de valversnelling in m/s^2.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$

Hierin is T de trillingstijd van het massaveersysteem in s, m de massa in kg en C de veerconstante in N/m.

De formule voor de slinger is gebaseerd op een aantal benaderingen.
- Het zwaartepunt van de slinger moet zich aan het uiteinde van de lengte ℓ bevinden.
- De amplitude van de trilling moet klein zijn ten opzichte van de lengte ℓ.
- De slinger moet vrij slingeren (zonder aandrijving).

Naarmate de slinger meer afwijkt van deze voorwaarden zal bovenstaande formule minder goed voldoen.

Opgave: Bol aan veer

Een bol met een massa van $150\ g$ hangt aan een lange spiraalveer die een veerconstante van $20\ N/m$ heeft. De bol wordt vanuit zijn evenwichtstand $5{,}0\ cm$ omlaag getrokken en daarna losgelaten. De bol gaat vanaf dit moment een harmonische trilling uitvoeren. Het tijdstip van loslaten noemen we $t = 0\ s$.

a) Hoe groot is de amplitude van de trilling?
b) Tussen welke waarden varieert de uitrekking van de veer?
c) **Bereken** de grootte van de terugdrijvende kracht als de bol zich in de uiterste stand boven en in de uiterste stand beneden bevindt.
d) **Teken** onder elkaar een (u,t)-diagram en een (F_t,t)-diagram.
Doe dit voor het tijdsinterval $0\ s \leq t \leq T$. Met u wordt in dit geval de uitwijking bedoeld.
e) **Teken** een (F_t,u)-diagram.

Resonantie

In bovenstaande voorbeelden hebben we gekeken naar vrije trillingen. Dat wil zeggen naar trillingen die, nadat ze eenmaal gestart waren, niet meer werden aangedreven. Je kunt een trilling echter ook aandrijven. Zie nevenstaande afbeeldingen.
Waarschijnlijk heb je wel eens op een schommel gezeten. Je weet uit ervaring dat, als je je gewicht in het juiste ritme verplaatst ten opzichte van de zitplaats, je de trilling aan kunt drijven, oftewel steeds hoger komt. Hetzelfde gebeurt bij een ouderwetse slingerklok. De slinger slingert steeds in hetzelfde ritme en het klokmechanisme drijft de slinger precies met deze frequentie aan, gebruik makend van de energie die je in de opwindveer hebt gestopt tijdens het opdraaien van de klok. Als de veerenergie op is, zal de slinger langzaam maar zeker tot stilstand komen.

Je kunt elk voorwerp dwingen om een trilling uit te voeren, maar het gemak waarmee je dit lukt, hangt af van de frequentie waarmee je het voorwerp wilt laten trillen. Terugkomend op het voorbeeld met de schommel. Je weet dat als je de schommel steeds hoger wilt krijgen je je gewicht in het ritme van de schommel moet verplaatsen. Oftewel, als je een schommel goed zou bestuderen, zou je tot de conclusie komen dat de slingertijd van de schommel altijd hetzelfde is, ongeacht de amplitude. In een eerdere paragraaf heb je gezien dat voor de slingertijd van een slinger een eenvoudige formule geldt namelijk

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}\,.$$

Als je de aandrijving precies op dit ritme regelt, dan zal de schommel steeds hoger gaan. Wil je de schommel op een andere frequentie laten trillen, dan kost je dat veel meer moeite. Probeer een schommel maar eens twee keer zo langzaam of twee keer zo snel te laten slingeren dan voorgeschreven door bovenstaande formule. Je zult merken dat je de schommel dan moet forceren en het zeer veel meer moeite kost om hoog te komen.

Dus samengevat:
Je kunt elk voorwerp laten trillen op elke willekeurige frequentie, maar bij één bepaalde frequentie, namelijk de zogenaamde eigenfrequentie, zal de amplitude die je kunt bereiken maximaal zijn.
Een en ander is weergegeven in de applet onder nevenstaande link: link naar applet [1].

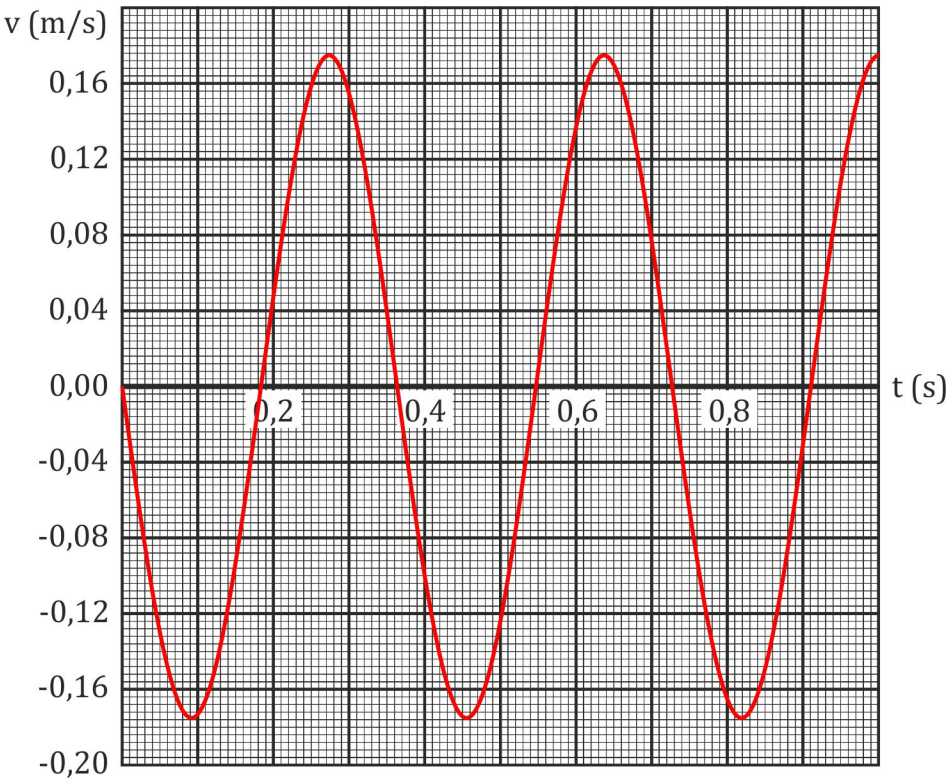
Resonantie treedt op als de frequentie van de aandrijving gelijk is aan de zogenaamde eigenfrequentie van het trillende voorwerp. De eigenfrequentie is de frequentie waarmee het voorwerp trilt als het niet aangedreven wordt. De eigenfrequentie wordt ook vaak resonantiefrequentie genoemd.

Voor meer uitleg over resonantie, kijk eens naar het filmpje onder onderstaande link: link naar filmpje [2].

Bekijken we resonantie in termen van energiebehoud, dan kun je met elke frequentie energie overdragen naar een systeem, maar met de eigenfrequentie lukt dit het meest efficiënt.
In de applet onder onderstaande link staat het voorbeeld van twee gekoppelde slingers. In de les heb je gezien dat als beide slingers dezelfde lengte hebben de energieoverdracht optimaal is. Als beide slingers een verschillende lengte hebben, is de energieoverdracht wezenlijk slechter.
link naar applet [1)]

Opgave: Trillingen in een vrachtauto

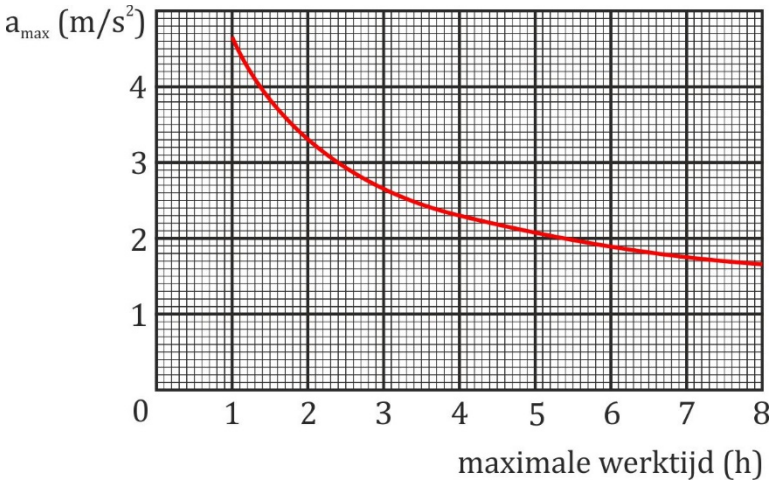
Een chauffeur van een vrachtwagen heeft vaak last van trillingen die veroorzaakt worden door de motor van de vrachtwagen. Deze trillingen worden via de chauffeursstoel aan de chauffeur doorgegeven. Deze trillingen kunnen, naast ongemak, ook schade aan de rug veroorzaken. Het is daarom belangrijk dat er strenge eisen worden gesteld aan de kwaliteit van een chauffeursstoel.
In deze opgave gaan we stapsgewijs enkele van die eisen na.
Uit onderzoek is gebleken dat vooral trillingen met een frequentie tussen $2{,}0\ \mathrm{Hz}$ en $80\ \mathrm{Hz}$ schade aan de rug veroorzaken. In onderstaande afbeelding is een (v,t)-diagram van een trilling van een chauffeursstoel gegeven.



a) **Bepaal** of deze trilling binnen het genoemde frequentiegebied valt.
Geef je antwoord in twee significante cijfers.

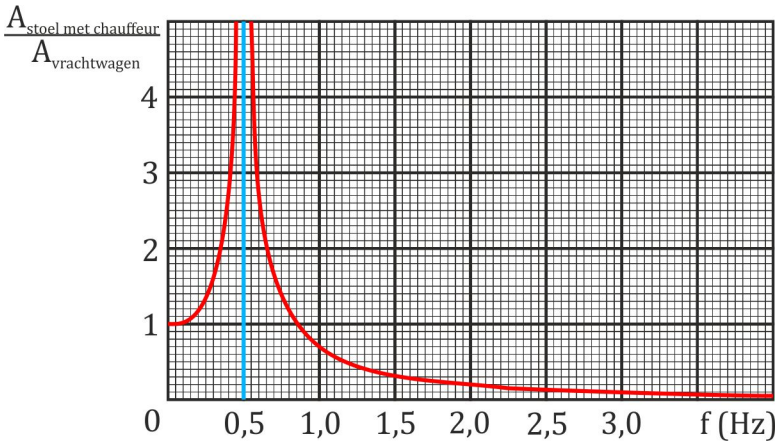
1)

De maximale versnelling die een chauffeur gedurende een bepaalde tijd ondervindt, bepaalt hoe schadelijk de trillingen zijn. In nevenstaande afbeelding staat uitgezet hoe lang de chauffeur mag werken bij een bepaalde maximale versnelling.



b) **Bepaal** hoe lang een chauffeur mag werken als hij deze trillingen ondervindt.

Stoelen in vrachtwagens zijn vaak op een veersysteem geplaatst. Zie onderstaande linker afbeelding.
In onderstaande rechter afbeelding is de verhouding gegeven tussen de amplitude van de beweging van de stoel (met chauffeur) en de amplitude van de vrachtwagen als functie van de frequentie.

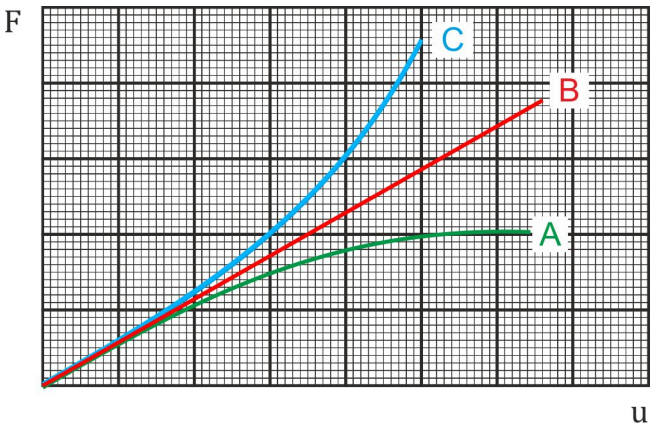


c) **Leg uit** of de problemen in het gebied vanaf 2,0 Hz met dit veersysteem nu minder zijn.

De eigenfrequentie van het systeem is 0,50 Hz. De chauffeur heeft een massa van 90 kg, de veerconstante van de veer in de stoel bedraagt $1{,}3 \cdot 10^3$ N/m.

d) **Bereken** de massa van de stoel.

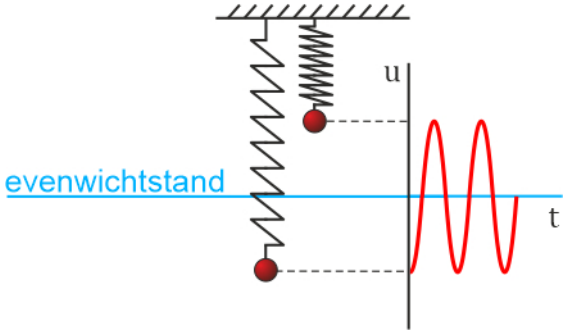
Als een chauffeur op deze stoel gaat zitten, zakt de stoel te ver in.
Daarom moet de veer in de stoel vervangen worden door een veer waarbij de veerconstante toeneemt als de kracht op de veer toeneemt.
In nevenstaand (F,u)-diagram zijn drie grafieken gegeven voor drie verschillende veren.



e) **Leg uit** welke veer (A, B, of C) het meest geschikt is voor deze chauffeursstoel.

Energiebehoud

Energiebehoud in een massaveersysteem
Een bol met een massa van $150\ \mathrm{g}$ hangt aan een lange spiraalveer die een veerconstante van $20\ \mathrm{N/m}$ heeft. De bol wordt vanuit zijn evenwichtstand $5{,}0\ \mathrm{cm}$ omlaag getrokken en daarna losgelaten. De bol gaat vanaf dit moment een harmonische trilling uitvoeren. Het tijdstip van loslaten noemen we $t = 0\ \mathrm{s}$.



In dit hoofdstuk gaan we kijken naar de verschillende vormen van energie die hierbij een rol spelen. In bovenstaand voorbeeld zijn de kinetische energie, de zwaarte-energie en de veerenergie van belang.
Bij de start van de trilling voeren we energie aan het systeem toe door de massa uit zijn evenwichtstand $5{,}0\ \mathrm{cm}$ omlaag te trekken. Deze energie wordt opgeslagen in de vorm van veerenergie. Zodra de massa wordt losgelaten, wordt deze energie omgezet in bewegingsenergie en zwaarte-energie.

Hoe gedragen de veerenergie, de zwaarte-energie en de kinetische energie zich als functie van de tijd?

Voor de verschillende vormen van energie geldt:

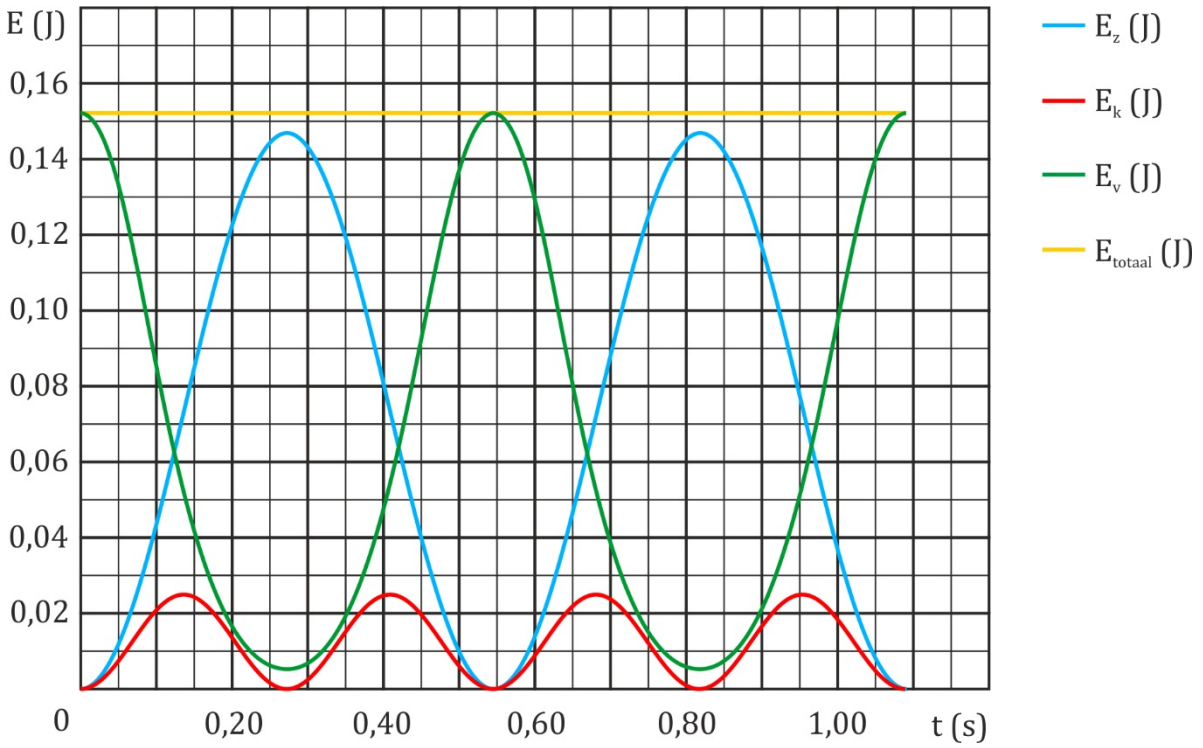
- $E_z = m \cdot g \cdot h$
  met $h = 0\ \mathrm{m}$ in de uiterste stand beneden.
- $E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$
- $E_v = ½ \cdot C \cdot u^2$
  Let op! u staat voor de uitrekking van de veer.

Voor een harmonische trilling geldt dat u een sinusfunctie van de tijd is.

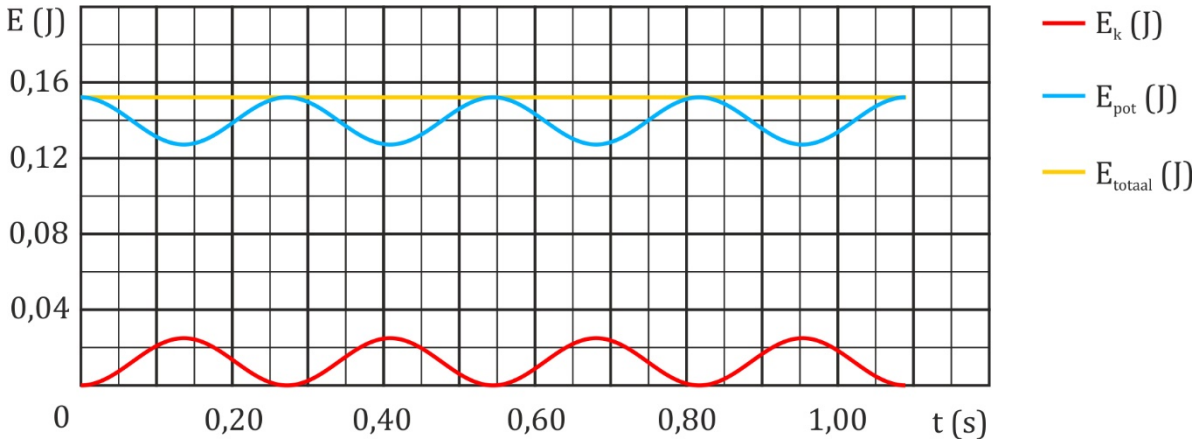
$$u = A \cdot \sin(\text{constante} \cdot t)$$

Dit resulteert in onderstaande grafieken voor de verschillende vormen van energie.

Je kunt duidelijk zien dat de ene vorm van energie wordt omgezet in de andere, maar dat te allen tijde de optelsom van de verschillende vormen van energie constant is. Er is dus voortdurend voldaan aan de wet van behoud van energie.

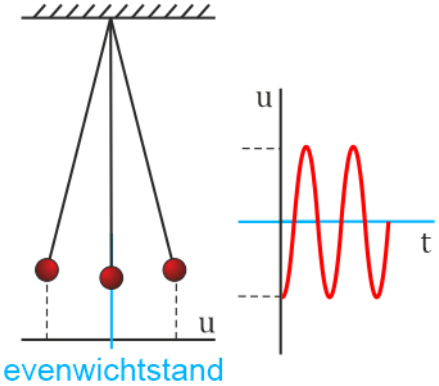


Vaak wordt de optelsom van de zwaarte-energie en de veerenergie aangeduid als potentiële energie (E_p). Dit zou resulteren in onderstaande grafieken.

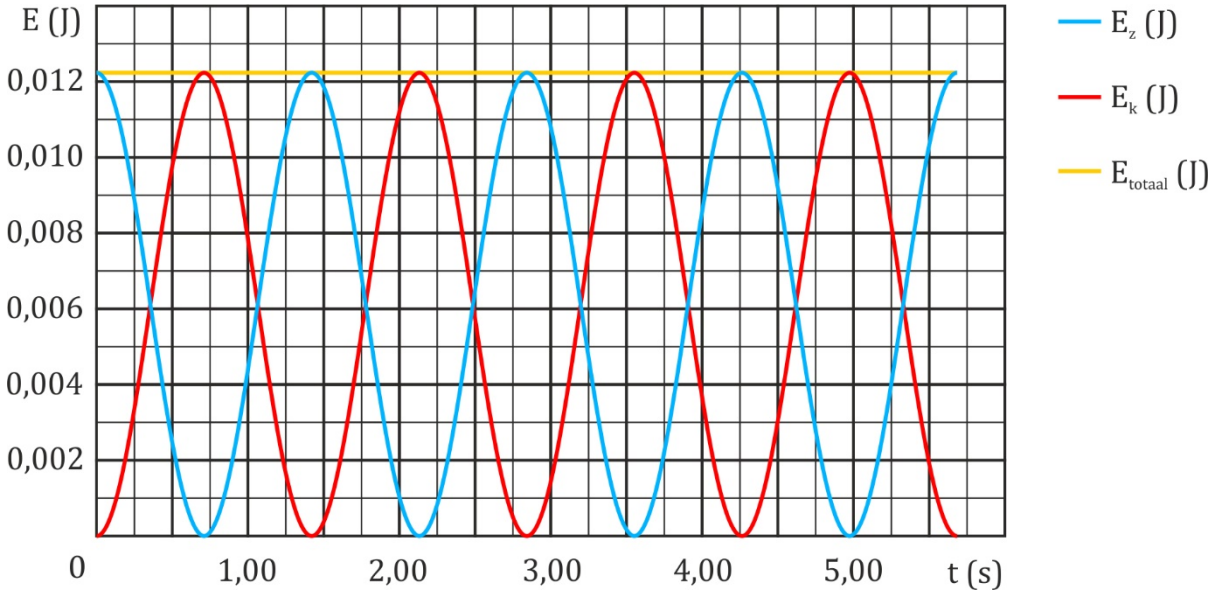


Energiebehoud in de slinger

Een massa hangt aan een lang touw. De massa wordt vanuit zijn evenwichtstand $5{,}0\ \mathrm{cm}$ naar links getrokken en daarna losgelaten. De massa gaat vanaf dit moment een harmonische trilling uitvoeren. Het tijdstip van loslaten noemen we $t = 0\ \mathrm{s}$.



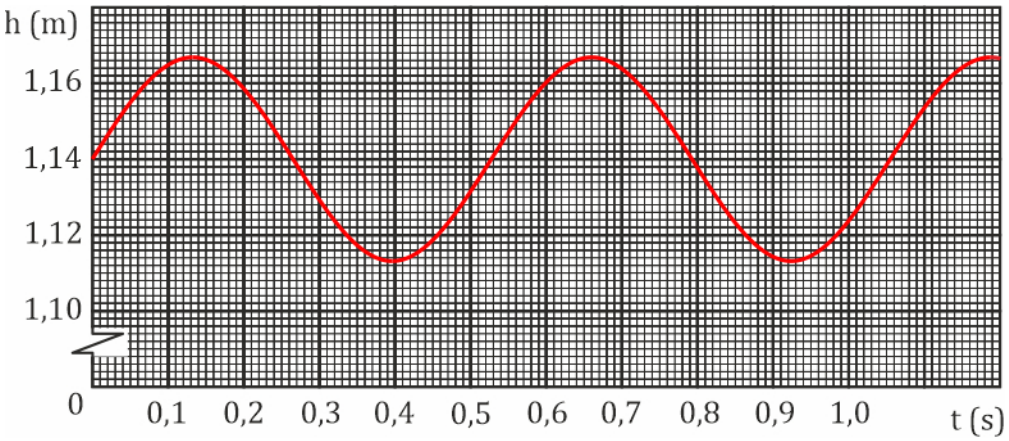
In bovenstaand voorbeeld zijn de zwaarte-energie en de kinetische energie van belang.
Bij de start van de trilling voeren we energie aan het systeem toe door de massa uit zijn evenwichtstand $5{,}0\ \mathrm{cm}$ naar links te trekken. Deze energie wordt opgeslagen in de vorm van zwaarte-energie. Zodra de massa wordt losgelaten wordt deze energie omgezet in kinetische energie. Zie onderstaande afbeelding.



Ook nu weer geldt dat de optelsom van de verschillende vormen van energie constant is.

Opgave: Rugzakgenerator

Als een wandelaar met een rugzak loopt, gaat de rugzak op en neer. Daardoor verandert tijdens iedere stap de hoogte van het zwaartepunt van de rugzak.
De wandelaar loopt met constante snelheid. Onderstaande afbeelding geeft de grafiek van de hoogte van het zwaartepunt van de rugzak als functie van de tijd weer.



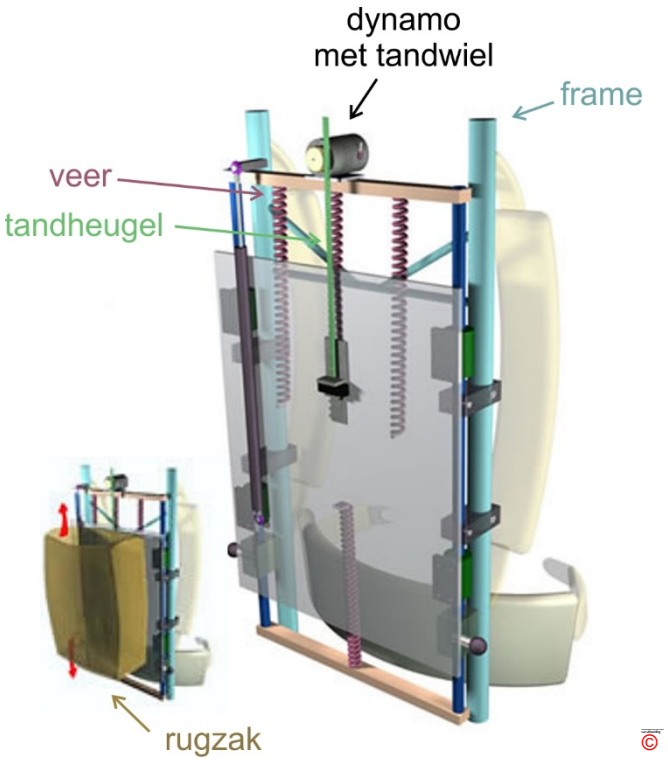
De massa van de rugzak is $29\ \mathrm{kg}$.

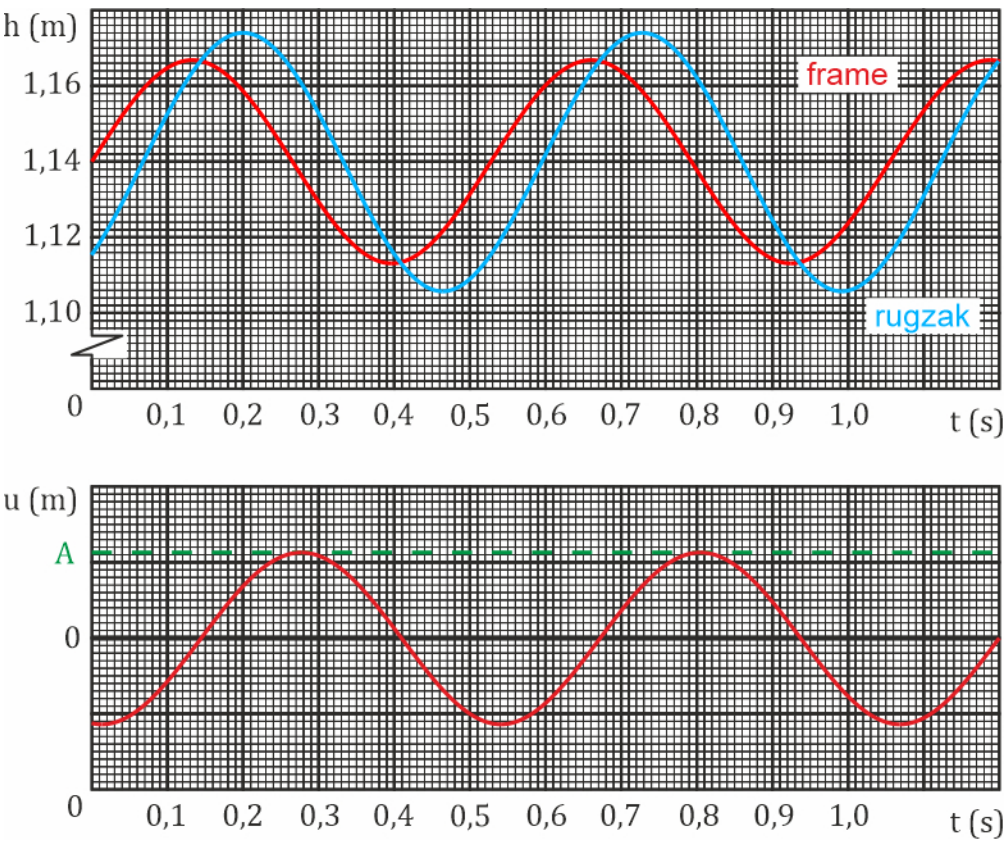
a) **Bepaal** met behulp van bovenstaande afbeelding het verschil tussen de maximale en minimale zwaarte-energie van de rugzak.

Bij iedere stap legt de wandelaar $0{,}70\ \mathrm{m}$ af. Eén periode in het diagram komt overeen met één stap.

b) **Bepaal** met behulp van bovenstaande afbeelding de horizontale snelheid van de wandelaar in $\mathrm{km/h}$. Geef je antwoord in twee significante cijfers.

Een Amerikaanse bioloog heeft een manier bedacht om uit de verticale beweging van de rugzak elektrische energie te halen. Hij ontwierp een rugzakgenerator.
Deze bestaat uit een **frame** waarop een **dynamo** is bevestigd. Aan het frame dat vastzit aan de rug van de wandelaar, wordt de **rugzak** verend opgehangen. Tijdens het lopen beweegt de rugzak ten opzichte van het frame en drijft, via een zo geheten **tandheugel**, de **dynamo** aan. Zie nevenstaande afbeelding.
De wandelaar gaat met deze rugzak op dezelfde manier lopen als hiervoor.
In onderstaande afbeelding is de grafiek van de hoogte van het frame en van de rugzak als functie van de tijd weergegeven.





Het verschil van de twee grafieken geeft weer hoe de rugzak beweegt ten opzichte van het frame. De verschilgrafiek is eveneens weergegeven in bovenstaande afbeelding. De grootte van de amplitude A van de trilling die de rugzak ten opzichte van het frame uitvoert, kan worden bepaald met behulp van bovenstaande grafiek.

c) **Bepaal** de grootte van de amplitude A.
Licht toe hoe je de grootte van A hebt bepaald.

De dynamo levert een gemiddeld vermogen van $3{,}7\ \mathrm{W}$.

d) **Bereken** de hoeveelheid energie die is opgewekt na $3{,}5\ \mathrm{uur}$ lopen.

De veerconstante van de twee veren samen is gelijk aan $4{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{N/m}$.
De massa van de rugzak is nog steeds $29\ \mathrm{kg}$.

e) **Bereken** de eigenfrequentie van de rugzak.

De rugzakgenerator wekt de meeste energie op als de eigenfrequentie van de rugzak gelijk is aan de stapfrequentie. Stel dat aan deze voorwaarde is voldaan.
De wandelaar gaat nu sneller lopen door zijn stapfrequentie op te voeren.
Om weer de maximale energieoverdracht naar de generator te krijgen, zou de wandelaar de massa van de rugzak moeten veranderen.

f) **Leg uit** of hij daarvoor de massa groter of kleiner moet maken.

Colofon

Deze reader is onderdeel van het lesmateriaal dat is ontwikkeld voor het vak natuurkunde bij het Roercollege Schöndeln in Roermond. Dit bestand is onderdeel van een complete lesmethode die het gehele curriculum voor het vak natuurkunde van HAVO 4 t/m HAVO 5 dekt.
De gehele lesmethode is te vinden op de site https://www.rwi-natuurkunde.nl.

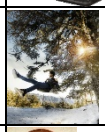
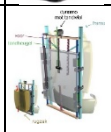
De afbeeldingen die in dit lesmateriaal zijn gebruikt zijn in ruwweg vier groepen te verdelen:

- Afbeeldingen die zelf zijn gemaakt. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen afkomstig uit het publieke domein (creative commons CC0). Hieronder vallen de afbeeldingen van onder andere Pixabay, Pexels, Unsplash en HiClipart. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen die zijn ingekocht bij onder andere iStock, ShutterStock, DepositPhotos en Dreamstime. Deze zijn niet gemarkeerd.
- Afbeeldingen afkomstig uit het publieke domein, maar die onder de creative commons licentie (CC BY) vallen. Deze afbeeldingen zijn gemarkeerd met "©" .

In onderstaande lijst is herkomst en de auteursrechthebbende voor de diverse afbeeldingen weergegeven voor zover die bij mij bekend zijn. Mocht iemand van mening zijn dat er een afbeelding tussen zit waar auteursrecht op zit dan kan dat gemeld worden bij somlrw02@soml.nl.
Afbeeldingen die niet in onderstaande lijst zijn opgenomen zijn geheel zelf gemaakt.

Reader:

Blz.	Afbeelding	Herkomst / auteursrecht
1 3		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com
		HiClipart https://www.hiclipart.com

		HiClipart https://www.hiclipart.com
7		Pexels https://www.pexels.com Image credit: Ilyes seven
7		Pixabay https://pixabay.com Image credit: Elke
8		iStock https://www.istockphoto.com id-nummer: iStock-1591658533
8		Tekseating https://www.tekseating.co.uk Productfoto: KAB 85/K6- Invictus MS
13		Researchgate https://www.researchgate.net Image credit: American Association for the Advancement of Science

Colofon voor ondersteunende bestanden

Studiehulp:

Blz.	Afbeelding	Herkomst / auteursrecht
1		DepositPhotos https://depositphotos.com id-nummer: Depositphotos_51364621_L
3		DepositPhotos https://depositphotos.com id-nummer: Depositphotos_62068743_L
4		DepositPhotos https://depositphotos.com id-nummer: Depositphotos_6399311_L